# 超平面配置の補空間における基本群のコホモロジー次元について

京都大学 大学院理学研究科 数学・数理解析専攻 数理解析系
進 泰盛 (Taisei SHIN) *

**概要**

代数多様体のエタール基本群とそれに付随する情報から，もとの代数多様体の情報を復元できるかという問題は遠アーベル幾何学における中心的なテーマである．付随する情報の一つとして，代数多様体に対応する複素解析空間の基本群（より正確にはその副有限完備化）がある．本稿では，$n$ 次元複素射影空間内の本質的な超平面配置について，補空間の基本群とその副有限完備化のコホモロジー次元は $n$ 以上であるという結果について紹介する．

## 1 導入

遠アーベル幾何学において，遠アーベル多様体に関する研究は中心的なテーマである．遠アーベル多様体とは，代数多様体 $X$ であって，そのエタール基本群 $\pi_1^{\text{ét}}(X)$ と付随する情報から $X$ の情報が「復元」できるような対象である．「復元」にはさまざまな定義が考えられるため，特に高次元においては遠アーベル多様体に一般的な定義は存在しない．そこで，高次元遠アーベル多様体に一般的な定義を与えることができるかということが遠アーベル幾何学における主要な問題となる．

付随する情報とは具体的に，体 $k\,(\subseteq \mathbb{C})$ 上の（幾何学的連結な）代数多様体 $X$ に対する次の完全列

$$1 \to \widehat{\pi}_1((X_{\mathbb{C}})^{\mathrm{an}}) \to \pi_1^{\text{ét}}(X) \to G_k \to 1$$

のことである．ここで，$(X_{\mathbb{C}})^{\mathrm{an}}$ は $X$ の $\mathbb{C}$ への基底変換の解析化である複素解析空間，$\widehat{\pi}_1((X_{\mathbb{C}})^{\mathrm{an}})$ は位相的基本群 $\pi_1((X_{\mathbb{C}})^{\mathrm{an}})$ の副有限完備化，$G_k$ は $k$ の絶対ガロア群を表す．この完全列より，複素解析空間の基本群を考えることは重要となる．そこで一種の「復元」として，$\widehat{\pi}_1((X_{\mathbb{C}})^{\mathrm{an}})$ のコホモロジー次元から $X$ の空間の次元を思い出すことができるかという問題が考えられる．本稿では，複素解析空間 $(X_{\mathbb{C}})^{\mathrm{an}}$ として超平面配置の補空間を考え，その基本群と副有限完備化のコホモロジー次元に関して得られた結果を紹介する．

* E-mail : shin@kurims.kyoto-u.ac.jp

## 2　準備

本節では，主定理に向けた準備を行う．主に超平面配置に関するさまざまな概念を紹介する．以下で考える空間は全て有限次元であることに注意しておく．

**定義 2.1.** 体 $k$ 上の射影空間（resp. アフィン空間）に対し，余次元 1 の部分射影空間 (resp. 部分アフィン空間) を**超平面**という．また，有限個の超平面からなる集合を**超平面配置**という．特に，射影空間内の超平面配置を**射影配置**，アフィン空間内の超平面配置を**アフィン配置**ということもある．

アフィン空間が特にベクトル空間である場合，原点を通る超平面を**線形超平面**という．また，線形超平面からなるアフィン配置を**中心的配置**という．以下では，「空間」とは体 $k$ 上の射影空間，アフィン空間，ベクトル空間のいずれかとし，そこでの超平面配置とはそれぞれ射影配置，アフィン配置，中心的配置を表すことにする．また，以下では体 $k$ は省略する．

**定義 2.2.** 空間 $X$ 内の超平面配置 $\mathcal{A}$ に対して，

$$M(\mathcal{A}) = X \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H$$

を超平面配置 $\mathcal{A}$ の**補空間**という．

超平面配置 $\mathcal{A}$ に対して，交差情報からなる組み合わせ論的不変量 $L(\mathcal{A})$ を導入する．超平面配置 $\mathcal{A}$ や補空間 $M(\mathcal{A})$ に関する性質を，$L(\mathcal{A})$ の半順序集合としての構造のみから記述できるかという問題は，超平面配置の分野において中心的な話題である．

**定義 2.3.** 空間 $X$ 内の超平面配置 $\mathcal{A}$ に対して，

$$L(\mathcal{A}) = \left\{ \bigcap_{H \in \mathcal{B}} H \neq \emptyset \;\middle|\; \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \right\}$$

と定める．ただし，$\mathcal{B} = \emptyset$ のときは $\bigcap_{H \in \mathcal{B}} H = X$ と考える．このとき，$L(\mathcal{A})$ を通常の集合の包含関係とは逆の順序で半順序集合とみなしたものを，超平面配置 $\mathcal{A}$ の**交差半順序集合**という．

**定義 2.4.** $\mathcal{A}$ を空間 $X$ 内の超平面配置として，$S \in L(\mathcal{A})$ とする．$S$ の**階数**を

$$\mathrm{rk}(S) = \mathrm{codim}_X(S)$$

と定める．また，$\mathcal{A}$ の**階数**を

$$\mathrm{rk}(\mathcal{A}) = \max \{\mathrm{rk}(T) \mid T \in L(\mathcal{A})\}$$

と定める．

次の本質的配置は，超平面配置の中でも特に（名前のとおり）本質的となる配置である．

**定義 2.5.** 射影配置 $\mathcal{A}$ に対して，

$$\bigcap_{H \in \mathcal{A}} H = \emptyset$$

が成り立つとき，$\mathcal{A}$ を**本質的配置**という．

また，$n$ 次元空間内のアフィン配置 $\mathcal{A}$ に対して，

$$\mathrm{rk}(\mathcal{A}) = n$$

が成り立つとき，$\mathcal{A}$ を**本質的配置**という．

射影配置と中心的配置を結びつけるコーン化・デコーン化という操作を紹介する．

**定義 2.6.** $n+1$ 次元ベクトル空間 $V$ に対して, $\boldsymbol{P}(V)$ を付随する $n$ 次元射影空間, $\pi\colon V\setminus\{\boldsymbol{0}\} \twoheadrightarrow \boldsymbol{P}(V)$ を自然な射影とする．$\boldsymbol{P}(V)$ の超平面 $H$ に対して，$V$ 内の線形超平面

$$\boldsymbol{c}H = \pi^{-1}(H) \cup \{\boldsymbol{0}\}$$

を $H$ の**コーン化**という．また，$\boldsymbol{P}(V)$ 内の射影配置 $\mathcal{A} = \{H_1, \ldots, H_r\}$ に対して，$V$ 内の中心的配置 $\boldsymbol{c}\mathcal{A} = \{\boldsymbol{c}H_1, \ldots, \boldsymbol{c}H_r\}$ を $\mathcal{A}$ の**コーン化**という．

逆に，$V$ の線形超平面 $H$ に対して，$\boldsymbol{P}(V)$ の超平面

$$\boldsymbol{d}H = \pi(H \setminus \{\boldsymbol{0}\})$$

を $H$ の**デコーン化**という．また，$V$ 内の中心的配置 $\mathcal{A} = \{H_1, \ldots, H_r\}$ に対して，$\boldsymbol{P}(V)$ 内の射影配置 $\boldsymbol{d}\mathcal{A} = \{\boldsymbol{d}H_1, \ldots, \boldsymbol{d}H_r\}$ を $\mathcal{A}$ の**デコーン化**という．

**命題 2.7.** $V$ を $n+1$ 次元ベクトル空間として，$\mathcal{A} = \{H_1, \ldots, H_r\}$ を $\boldsymbol{P}(V)$ 内の射影配置とする．このとき，次が成り立つ．

(1) $\mathcal{A}$ の超平面 $H \in \mathcal{A}$ に対して，$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{c}H) = H$ である．
(2) $\mathcal{A}$ の任意の部分配置 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ に対して，$\mathrm{rk}\left(\bigcap_{H\in\mathcal{B}} H\right) = \mathrm{rk}\left(\bigcap_{H\in\mathcal{B}} \boldsymbol{c}H\right)$ である．
(3) $\mathcal{A}$ が本質的であることとコーン化 $\boldsymbol{c}\mathcal{A}$ が本質的であることは同値である．

同様の主張がデコーン化についても成り立つ．また，(3)により，射影配置およびアフィン配置の双方に対して「本質的配置」という用語を用いることが妥当であることがわかる．

最後に，次節で主張を述べるために必要となる群のコホモロジー次元と $K(\pi, 1)$ 空間について紹介する．一般に，群 $G$ に対して $G$ 加群という概念が定義され，$G$ 加群 $M$ に対して群のコホモロジー $H^n(G, M)$ を考えることができる．

**定義 2.8.** 群 $G$ に対して，

$$\mathrm{cd}(G) = \sup\left\{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \;\middle|\; \text{ある}\, G \,\text{加群}\, M \,\text{が存在して}, H^n(G, M) \neq 0\right\}$$

を $G$ の**コホモロジー次元**という．

以下で定義する副有限群についても（上とは異なる定義で）コホモロジー次元を定義することができる (cf. [RZ10])．副有限群 $\Pi$ に対しても同様に，コホモロジー次元を $\mathrm{cd}(\Pi)$ と表すことにする．

**定義 2.9.** コンパクト，ハウスドルフ，完全不連結である位相群を**副有限群**という．

**定義 2.10.** 群 $G$ に対して，副有限群

$$\hat{G} = \varprojlim_{\substack{N \trianglelefteq G \\ (G:N)<\infty}} G/N$$

を $G$ の副有限完備化という．

$K(\pi,1)$ 空間とは，位相空間のコホモロジーと基本群のコホモロジーが結びつく対象である (cf. [Bro82, CHAPTER III.1])．

**定義 2.11.** 位相空間 $X$ が弧状連結であり，2 次以上のすべてのホモトピー群が自明であるとき，$X$ を $K(\pi,1)$ **空間**という．

# 3 主定理

本節では，本質的な超平面配置の補空間に対して，基本群のコホモロジー次元に関する結果について述べる．

**命題 3.1** (cf. [FR00, p.11])**.** $\mathcal{A}$ を $n$ 次元複素射影空間 $\boldsymbol{P}^n(\mathbb{C})$ 内の本質的な射影配置とし，その補空間 $M(\mathcal{A})$ は $K(\pi,1)$ 空間であるとする．このとき，

$$\mathrm{cd}(\pi_1(M(\mathcal{A}))) = n$$

が成り立つ．

$K(\pi,1)$ 性を仮定しない場合でも，基本群（とその副有限完備化）のコホモロジー次元は $n$ 以上であるという次の定理を示した．

**主定理 3.2.** $\mathcal{A}$ を $n$ 次元複素射影空間 $\boldsymbol{P}^n(\mathbb{C})$ 内の本質的な射影配置とする．このとき，

$$\mathrm{cd}(\pi_1(M(\mathcal{A}))) \geq n$$

が成り立つ．さらに，副有限完備化 $\widehat{\pi}_1(M(\mathcal{A}))$ のコホモロジー次元に対しても，

$$\mathrm{cd}(\widehat{\pi}_1(M(\mathcal{A}))) \geq n$$

が成り立つ．

# 4 主定理の証明の概略

本節では，主定理 3.2の証明の概略について述べる．超平面配置 $\mathcal{A}$ と $X \in L(\mathcal{A})$ に対して，$\mathcal{A}_X = \{H \in \mathcal{A} \mid X \subseteq H\}$ を $\mathcal{A}$ の $X$ での**局所化**という．

**命題 4.1** ([Par93, Lemma1.1], [Yos24, Proposition 8.1] )**.** $\mathcal{A}$ を $n$ 次元複素空間 $\mathbb{C}^n$ 内の本質的なアフィン配置とする．$X \in L(\mathcal{A})$ として，$\iota\colon M(\mathcal{A}) \hookrightarrow M(\mathcal{A}_X)$ を自然な単射とする．このとき，任

意の $k \geq 1$ に対して，$\iota$ は分裂する全射群準同型

$$\iota_*\colon \pi_k(M(\mathcal{A})) \twoheadrightarrow \pi_k(M(\mathcal{A}_X))$$

を誘導する．

命題 4.1とデコーン化を帰納的に組み合わせることで次の命題を得る．

**命題 4.2.** $\mathcal{A}$ を $n$ 次元複素射影空間 $\boldsymbol{P}^n(\mathbb{C})$ 内の本質的な射影配置とする．このとき，分裂する全射群準同型

$$\pi_1(M(\mathcal{A})) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}^n$$

が存在する．

命題 4.2より，$\pi_1(M(\mathcal{A}))$ は $\mathbb{Z}^n$ と同型な部分群をもつので，

$$\mathrm{cd}(\pi_1(M(\mathcal{A}))) \geq \mathrm{cd}(\mathbb{Z}^n) = n$$

となる．また，$\widehat{\pi}_1(M(\mathcal{A}))$ は $\widehat{\mathbb{Z}^n} \simeq \widehat{\mathbb{Z}}^n$ と同型な閉部分群をもつので，

$$\mathrm{cd}(\widehat{\pi}_1(M(\mathcal{A}))) \geq \mathrm{cd}(\widehat{\mathbb{Z}}^n) = n$$

となる．

# 参考文献


[Bro82] K. S. Brown, Cohomology of groups, Graduate Texts in Mathematics, **87**, Springer-Verlag, New York-Berlin (1982).

[FR00] M. Falk, R. Randell, On the homotopy theory of arrangements. II, In: Arrangements—Tokyo 1998, Adv. Stud. Pure Math., Kinokuniya, Tokyo, **27** (2000), 93–125.

[Gro97] A. Grothendieck, Brief an G. Faltings (German), In: Geometric Galois Actions, 1, London Math. Soc. Lecture Note Ser., Cambridge Univ. Press, Cambridge, **242** (1997), 49–58 (With an English translation "Letter to G. Faltings" on pp. 285–293).

[OT92] P. Orlik, H. Terao, Arrangements of hyperplanes, Grundlehren Der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], **300**, Springer-Verlag, Berlin (1992).

[Par93] L. Paris, The Deligne complex of a real arrangement of hyperplanes, Nagoya Math. J. **131** (1993), 39–65.

[RZ10] L. Ribes, P. Zalesskii, Profinite groups, Ergebnisse Der Mathematik Und Ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], **40**, Springer-Verlag, Berlin (2010).

[Yos24] M. Yoshinaga. Topology of hyperplane arrangements via real structure. (2024), arXiv:2408.02038.